Laborationer i kursmomentet Datoranvändning E1

http://www.etek.chalmers.se/~hallgren/Eda/

Laboration nr 3: Matematikverktyget Maple

1992-1997 Magnus Bondesson
1998 och 99-09-16 Thomas Hallgren

1 Introduktion

Syftet med denna laboration är att ge dig en första praktisk kontakt med matematikverktyget Maple. Vissa av uppgifterna avser dessutom att antyda hur dessa verktyg kan användas för att ge ökad förståelse kring något fenomen. En del uppgifter kanske berör matematiska begrepp som du ännu inte stött på i mattekursen, men det borde gå bra att lösa dem ändå. I en annan laboration kommer vi att bekanta oss med ett annat matematikverktyg MATLAB. Du kommer under andra kurser att möta Maple och MATLAB och lär dig då successivt om systemen efter behov. Man lär sig naturligvis mycket på att själv experimentera med systemen och prova saker som verkar kul.

1.1 Förberedelser

Innan du kommer till laborationen skall du som vanligt ha tittat på några sidor i Gula Boken, denna gång kapitel 9 om Maple, fram t o m avsnitt 9.7 (hoppa över 9.3). Läs också åtminstone introduktionen i detta laborations-PM.

Där ej annorlunda sägs finns erforderliga funktioner beskrivna i Gula Boken. Så se till att du har den till hands. Labhandledarna svarar naturligvis också på frågor.

1.2 Redovisning

Visa vad du har gjort för en handledare när du är klar med uppgifterna.

Maple kan ses som en kombination av ett ordbehandlingsprogram och en kalkylator. Medan man arbetar tillverkar man ett dokument där innehållet omväxlande är det man själv har matat in och svar som Maple har räknat ut åt dig. Det är lätt att spara och/eller skriva ut dokumentet. **Spara ofta** under arbetets gång, så att inte allt går förlorat ifall Maple skulle krascha eller det blir strömavbrott.

1.3 Maple i korthet

Maple är ett generellt matematikverktyg som är användbart i alla sammanhang där matematik spelar en roll.

Här följer några grundläggande fakta som kan vara bra att känna till innan man börjar arbeta med Maple:

- Varje kommando skall avslutas med `;` (eller `:` om man inte vill se Maples svar på kommandot).
- I Maple används `:=` för att göra definitioner. T ex betyder kommandot `x:=2` att variabeln `x` i fortsättningen står för talet 2.
- Vid redigering flyttar man sig upp i den tidigare textmassan genom att klicka med **vänstra musknappen** eller med **piltangenterna**. Vid utförandet av ett tidigare kommando (eventuellt redigerat) ersätts det tidigare svaret. Med musen eller piltangent kan man återvända till slutet.
- Undvik att trycka på returtangenten om något i textmassan är markerat; det markerade tas nämligen som ett kommando.
- Observera också att liksom i UNIX betyder i Maple stor och liten bokstav olika sak (oftast).

2 Uppgifter

2.1 Vi bekantar oss med Maple

Uppgift 1. Start av Maple

Det kan vara praktiskt att först skapa en katalog (mapp) *maple*, vilket sker med UNIX-kommandot *mkdir maple*, och att med *cd maple* flytta sig till den katalogen. Starta sedan Maple med UNIX-kommandot *xmaple* eller med programmenyns *Maple* (i det sista fallet anser Maple att du är kvar i hemkatalogen). Om Maple-fönstret och arbetsbladet blir små är det idé att omedelbart förstora dem (ändring sparas i filen `.xmaplev4rc`).

Uppgift 2. Definitioner, variabler och uttryck

Skriv in följande rader (bortsett från kommentarerna och redotecknen >). Varje kommando kommer att resultera i ett svar som ej medtagits här.

```
> s:=2+x;                    # Definiera ett uttryck
> x:=1;                      # Definiera x
> s;                         # Vilket värde har s nu?
> t:=2+x;                    # Definiera ett uttryck till
> x:='x';                    # Odefiniera x
> s;                         # Vilket värde har s nu?
> t;                         # Och t?
```

Notera att *s* hela tiden står för uttrycket *2+x*, som dock evalueras (beräknas) fullt ut om *x* är definierat, medan *t* — eftersom *x* var definierat när *t* definierades — står för uttrycket 3.

Uppgift 3. Uttryck

Beräkna π med 100 siffror. Beräkna det därefter även med 200 siffror genom att med musen flytta dig till uttrycket, bara ändra ett tecken i det inmatade och till sist trycka på returtangenten.

Uppgift 4. Uttryck

Skriv in följande rader (bortsett från kommentarerna och redotecknen >). Varje kommando kommer att resultera i ett svar som ej medtagits här.

```
> 2+1/3; sqrt(99);          # Beräkna värdet av två uttryck
> 2+0.33;sqrt(99.0);        # Två värden till
> 2+Pi;  sqrt(99.0+Pi);     # Och ytterligare två
```

Hade vi matat in motsvarande uttryck på en normal miniräknare, hade vi i samtliga fall fått numeriska approximationer. Men här får vi det bara i vissa fall. Vad kan det bero på? Beräkna — utan att skriva om något — numeriska värden i de saknade fallen.

Uppgift 5. Lär dig redigera och bli imponerad

a. Kontrollera att *x* är odefinierad genom att skriva ut värdet. Odefiniera, dvs skriv x:='x'; om så erfordras.

b. Definiera uttrycket
`s:=x^8+12*x^7+71*x^6+260*x^5+528*x^4+388*x^3-261*x^2-540*x-459;`
Om det råkar bli fel (lätt hänt när man skriver av sådana här långa konstiga saker), använd då piltangenterna eller musen för att korrigera (se inledningen ovan). I musfallet flyttar du markören till rätt plats, klickar med vänstra musknappen och rättar.

c. Skriv ut uttryckets värde.

d. Faktorisera uttrycket med *factor*. Resultatet skall om du gjort rätt bli snyggt. Vad blev det? ____

e. Ändra i uttrycket sista termen till 460 (använd musen för redigeringen) och tryck på returtangenten. Den nya definitionen kopplas till *s*.

f. Flytta musen till factor-raden och tryck på returtangenten. Nu försöker Maple faktorisera det nya uttrycket, men "misslyckas" eftersom uppgiften är "omöjlig". Funktionen *factor* försöker hitta faktorer av lägre gradtal med rationella koefficienter. Speciellt hittas linjära faktorer bara om det finns rationella rötter, d v s av formen p/q, där p och q är heltal.

g. Med ovanstående teknik försvinner de tidigare resultaten. Säg att vi vill se både den misslyckade faktoriseringen för 460, som ju syns nu, och den lyckade för 459 utan att behöva skriva om. Då kan vi ta till kopiering/klistring. Markera uttrycksberäkningen, klicka med vänstra mustangenten vid sista redotecknet, klicka med mellersta mustangenten, ändra 460 till 459 och tryck på returtangenten och vips har vi ett nytt uttryck. Alternativt kan du använda **Edit**-menyns **Copy**/**Paste**. Gör sedan på samma sätt med faktoriser-ingen.

h. Med tekniken i g. arbetar vi i två steg. Man kan göra uttrycksberäkningen och faktoriseringen i ett svep genom att skriva de två kommandona efter varandra på samma rad eller på två rader uppdelade med SHIFT-RETURN. Faktorisera på det viset uttrycket med 460 ersatt av 219 genom kopiering/klistring. Hur många faktorer blev det? ________

Ett alternativ till klipp-och-klistra-tekniken är att stoppa in en variabel i den delen av uttrycket som vi vill kunna ändra. Se t ex Uppgift 10.

Uppgift 6. En formel

a. Tag fram en så enkel formel som möjligt för summan $\sum_{k=1}^{N} k^5$. Använd *factor*. Vad blev formeln? ________________________________

b. Hur många siffror finns det i summans värde för N=7000? _____________
Tips: använd funktionen *length* (skriv `?length` så får du reda på vad den gör; tag bort hjälpfönstret med vänstra rubrikknappens **Close**).

Uppgift 7. Grafisk bestämning av nollställe

Ett enkelt och naturligt sätt att bestämma en reell rot till en ekvation $f(x) = 0$ är att rita upp uttrycket $f(x)$ på ett allt snävare intervall kring den intressanta roten, vilket ju lätt låter sig göras i Maple (använd `plot(f(x),x=a..b);`se som vanligt till att x är odefinierad). Bestäm med denna teknik roten i närheten av –2 till $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ på 0.001 när. Svar: ___________________

Uppgift 8. Uttryck och funktioner

Ett uttryck definieras enligt modellen `u:=2+3*x`. En motsvarande funktion i stället som `U:=x->2+3*x` (OBS! Skriv inte `U(x):=`, som kan ställa till många underligheter). Vill vi beräkna uttryckets värde för x=7 skriver vi `x:=7; u;`. Det är enklare att beräkna funktionens värde för x=7. Då skriver vi bara `U(7);`. `U(x)` är naturligtvis ett uttryck. Verktyget *diff* arbetar på uttryck medan *D* bildar derivatan av en funktion (se sid 202 i GB). För att få utskrift av funktionsdefinitionen måste man skriva `print(U);`.

Skriv en Maple-funktion motsvarande $f(x) = x^4 - 1$. Kalla den t ex FUNK1. Bilda även funktionens derivata och kalla den DFUNK1. Skriv till sist ut $f(3)$ och $f'(x)$.

Uppgift 9. Numerisk bestämning av rot till ekvation

Givet en ekvation f(x)=0 med en reell rot finns det en käck metod att ta reda på den. Välj först ett tal x0 i närheten av roten. Upprepa sedan följande beräkning till dess någon form av stabilitet synes uppstå:

Ersätt x_0 med $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, där $f'(x)$ är derivatan av $f(x)$.

Metoden kallas Newtons iterationsmetod (iterera betyder upprepa) och är lätt att motivera, vilket vi dock inte går in på här.

I Maple gör du lämpligen ungefär så här. Definiera funktioner motsvarande f och f’. Sätt x0 till lämpligt startvärde. Beräkna nytt x0-värde enligt formeln. Upprepa det sista steget ett antal gånger genom att bara klicka med musen och trycka på returtangenten.

a. Genomför detta för ekvationen $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ och för den rot som ligger i närheten av -2. Vilket värde stabiliseras beräkningarna vid? ________________

b. Maple har en funktion som heter *fsolve* för numerisk bestämning av rötter. Prova att hitta roten till ekvationen ovan med hjälp av *fsolve*.

Uppgift 10. Uttryck och olika sorters problem

a. Kontrollera att *x* och *a* är odefinierade. Definiera uttrycket s:=x^3+a*x^2+x+1;

b. Skriv ut uttryckets värde.

c. Sätt *a* till 1. Skriv ut uttryckets värde. Faktorisera det med *factor.*

d. Sätt *a* till 2. Skriv ut uttryckets värde. Försök att faktorisera det med *factor.*

e. Sätt *a* till -37/3. Skriv ut uttryckets värde. Faktorisera det med *factor.*

f. Sätt *a* till 2.1. Skriv ut uttryckets värde. Försök att faktorisera det med *factor.*

Vad lär vi oss av detta? I läroböcker brukar alla problem ha enkla lösningar. Men så är det uppenbarligen inte i verkligheten, inte ens när det gäller faktorisering. Faktoriseringsfunktionen *factor* har de begränsningar som nämndes i Uppgift 5 och som torde sammanfalla med vår uppfattning om faktorisering. Visst skulle man kunna tänka sig att t ex ytterligare några typer av linjära faktorer skulle kunna plockas fram (exempelvis x-sqrt(ngt)). Sammanfattningsvis: det finns problem som är i sig "omöjliga" och det finns andra problem som det aktuella systemet inte kan klara av.

Uppgift 11. Integrera

Här följer några uppgifter med bestämda integraler från första delen av ett matematikkompendium (hösten 95), vilka (liksom alla de övriga) lätt löses med Maple. Gör en eller annan och jämför med facit-svaren.

80a. $\int_0^{\pi/2} \sin^9 x\,dx$ 96d. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$ 300. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 \cdot \cos x + 7}\,dx$

2.2 Grafik

För att rita upp kurvor och ytor har Maple några olika kommandon. Vilket man ska använda beror på vilken form kurvan är given, och om den är tvådimensionell eller tredimensionell:

1. **Explicit form:** $y = f(x)$ med $x \in [a,b]$, dvs man ger en formel för hur man räknar ut y-värdet för ett givet x-värde. (För ytor i 3D blir det $z = f(x, y)$ med $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$.) Kommandon i Maple:

```
plot(f(x),x=a..b);
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
```

2. **Implicit form:** kurvan definieras av en ekvation innehållande variablerna x och y, t ex $f(x, y) = 0$. (För ytor i 3D blir det $f(x, y, z) = 0$.). Kommandon i Maple:

```
implicitplot(f(x,y)=0,x=a..b,y=c..d);
implicitplot3d(f(x,y,z)=0,x=a..b,y=c..d,z=e..f);
```

Kommandona *implicitplot* och *implicitplot3d* ligger inte i standardbiblioteket utan kräver att man först skrivit `with(plots);`

Vill man rita flera kurvor/ytor i samma diagram låter man funktionerna/uttrycken bilda en mängd, t ex:

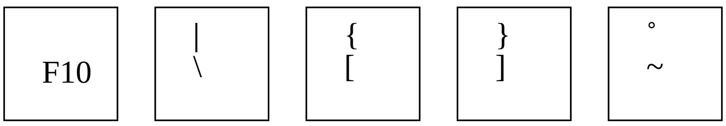
```
plot({f(x),g(x)},x=a..b);
```

```
implicitplot3d({f(x,y,z)=0,g(x,y,z)=0},...);
```

Genomgående är implicit-rutinerna långsammare än övriga.

Var finns tecknen [,], { och }?

Dessa tecken behövs snart. Numera har tangentborden på E alla intressanta tecken (några finns på märkta eller omärkta funktionstangenter till höger om F10 på tangent-



bordet) och när man trycker på motsvarande tangent blir det rätt på skärmen. Precis som det skall vara! Detta under förutsättning att standardinställningarna inte ändrats (det som skall gälla är mellersta bakgrundsmenyns **Keyboard Options/Key Swe Ext**).

Uppgift 12. Rita i 2D

a. Rita kurvan $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$ på intervallet $[-10, 10]$ (den är alltså given i explicit form). Prova de olika alternativen i menyn **Axes** (klicka först på figuren så att den är vald) och se efter vad de har för effekt. Förminska/förstora den genom att dra i någon av de små fyrkanterna i markeringsramen.

b. Tag med hjälpmenyns **Topic Search** (sökord `color` och sedan **Apply** eller **OK**)) reda på hur du kan få kurvan i a) att bli gul. Du kan alternativt använda `?plot` följt av en tryckning på color längst ned på den hjälpsida som då visar sig. Rita sedan upp kurvan gulfärgad. Det finns en mängd s k optioner till rit-kommandona, vissa kan man ändra med menyer.

c. Rita upp ellipsen $x^2+4y^2=1$, $x\in[-1,1]$, $y\in[-1,1]$. (Här har vi alltså en kurva given på implicit form.) Ellipsen ser ut som en ellips om du i **Projection**-menyn (tryck först på figuren) väljer **Constrained** i stället för det förvalda **Unconstrained**.

Uppgift 13. Rita flera funktioner samtidigt

Låt $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Rita upp kurvorna $y = f(x)$, $y = f'(x)$ och $y = \int_0^x f(t)dt$ på intervallet $[-20, 20]$ i en figur.

Uppgift 14. 3D-ritning

Matematiken bakom detta tas upp först i Matematik del C, så denna uppgifterna får väl ses som en förhandsvisning av vad man kan göra i Maple.

a. Hitta på en trevlig funktion $f(x, y)$ av två variabler (t ex $f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$). Rita upp den och pröva menyerna **Style**, **Color** och **Axes** (tryck först på figuren). Tryck på högra musknappen eller R-knappen för att få omritning. Vrid på figuren med vänstra musknappen.

b. Rita en "igloo" med följande kommando **utan att mata in det** för hand.

```
plot3d([x*sin(x)*cos(y),x*cos(x)*cos(y),x*sin(y)],x=0
..2*Pi,y=0..Pi);
```

Ge i stället kommandot ?plot3d och kopiera och klistra in kommandot från exempeldelen av hjälpen (man kallar t för x och u för y men det spelar ju ingen roll)! Vrid på igloon med vänstra musknappen. Se till att ytorna får färg.

c. Rita upp sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Rita sedan upp denna sfär och planet $x = 1$. Vrid och vänd.

2.3 Dokumentation

Uppgift 15. Dokumentation

När man skriver rapporter o d använder man normalt något ordbehandlingsprogram. Vi ska i en senare laboration titta på FrameMaker. Man kan foga in figurer från Maple i FrameMaker-dokument. Hur det går till beskrivs i Gula Boken. Men man kan — som omtalas i kompendiet — också göra sin dokumentation direkt i Maple eftersom det går att stoppa in bl a förklarande text i ett arbetsbladet. Det finns åtskilliga möjligheter. Här ser vi bara på en.

Markera en sektionsklammer i arbetsbladets vänsterkant. Välj **Insert/Text Input**.

Skriv in text i den nybildade sektionen. Kontextraden (se figuren på sid 192 i GB) byter samtidigt utseende (sid 211). Pröva eventuellt att välja annan stil än den normala med den vänstra menyn på kontextraden eller använd någon av de följande. Ett exempel ser du till höger.

I **Edit**-menyn finns en mängd alternativ för redigering av arbetsbladet, t ex för att ta bort delar, så man kan lätt avlägsna sina misstag före utskrift utan att börja på nytt.

3 Frivilliga extrauppgifter

Uppgift 16. Integrera

I den övningsexempelsamling i matematik som användes när jag började på Chalmers hittar man bl a integralen $\int x^n e^{-x} dx$. Beräkna den för n=3 med Maple. Svaret kan förenklas med *factor(");* En fråga att fundera över: Varför klarar inte Maple integralen för allmänt *n*?

Uppgift 17. Integrera

Att beräkna obestämda integraler till rationella funktioner är i de enklaste fallen bara fråga om rutinarbete, eftersom det bygger på (se mattekompendiet) en partialbråksuppdelning av den rationella funktionen. Verkligheten är dock något brutalare, eftersom det inte alltid går att hitta en partialbråksuppdelning av den form man brukar se på i läroböckerna. Men Maple klarar allt (exakt om rationella koefficienter)!

Beräkna med Maple $\int \frac{x^2}{x^3 + ax^2 + x + 1} dx$ för några olika a-värden (jfr Uppgift 10). Lämpligen införs först en variabel för uttrycket (se till att *x* och *a* är odefinierade).

a. a=1.

b. a=2. I detta fall får man en komplicerad exakt formel som är kopplad till rötterna till en ekvation. Beteckna denna med *integral*. Då ger *evalf(integral)* en numerisk approximation.

c. a=2.1. I detta fall får man direkt en numerisk approximation.

d. a=21/10. Exakt formel.

e. Beräkna ett par av motsvarande bestämda integraler för gränserna 0 och 1.

Uppgift 18. Visualisera taylorutveckling

Bestäm polynom av grad 1,3,5,7 och 15 som approximerar funktionen sin(x) i närheten av x=0 (se *taylor* och *convert*, sid 201). Lägg för enkelhets skull polynomen i fem olika variabler, t ex *p*1, *p3*, *p5*, *p7* och *p15*. Rita sedan upp dessa funktioner och sin(x) i ett diagram (se sid 176, mitten, eller uppgift 15) för intervallet [0,10]. Det är lämpligt att i plot-kommandot lägga till en sista parameter som anger önskat y-intervall, t ex [–10,10] .

Uppgift 19. Rita kurvor givna på parameterform

Vi har tidigare sett hur man ritar kurvor givna på explicit och implicit form. En tredje form är **parameterform**, där koordinaterna för punkter på kurvan anges som funktioner av en extra, oberoende variabel, dvs $x = x(t)$, $y = y(t)$ med $t \in [a, b]$. Kommando i Maple:

```
plot([x(t),y(t),t=a..b]);
```

(Igloon i Uppgift 14 gavs på parameterform.) Rita upp lissajouskurvan $x = \sin(4t)$, $y = \sin(7t)$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Prova eventuellt sedan vad som händer om man byter ut konstanterna 4 och 7 mot något annat.

Uppgift 20. Tillverka sekvenser

Man vill ofta tillverka sekvenser med någon form av regelbundenhet, t ex 1,2,3,...,N eller f(1),f(2),...,f(N), där N är givet och f en given funktion. Detta kan göras med `seq(`*uttryck som innehåller i*,`i=1..N)`. Som vanligt måste *i* (eller det namn vi använder) vara odefinierad eller ’...’-notation användas (jfr *sum* och *plot*, sid 210). T ex

```
> seq(i,i=1..5);
               1, 2, 3, 4, 5
> seq(1,i=1..5);
               1, 1, 1, 1, 1
```

Tillverka de fyra följande sekvenserna (gör det utan att skriva om något i onödan!):

a. 1,8,...,N^3 med N=10

b. sin(0),sin(0.01),...,sin(6.28)

c. [1,1],[2,4],...,[N,N^3] med N=10

d. [0,sin(0)],[0.01,sin(0.01)],...,[6.28,sin(6.28)]

och rita upp punkterna i d. i ett punktdiagram (se GB, sid 206).

Uppgift 21. Lotto

Vi vill generera 7 slumpmässiga heltal mellan 1 och 35. Tag först med hjälpmenyns **Topic Search** reda på vad xxxx nedan skall ersättas med för att följande två rader skall generera två slumptal i det intervallet (tips: sökord random+**Apply**).

```
> slump:=xxxx(1..35);      # Skapar en funktion för slumptal
> slump();slump();         # som vi sedan kan anropa lika många
                           # gånger som det önskade antalet
                           # slumptal
```

Skapa sedan en följd av 7 slumpmässiga heltal (ej nödvändigtvis olika) mellan 1 och 35.

Uppgift 22. Kobingo med 200 kor och vinster

Vi vill generera ett antal slumpmässiga punkter med heltalskoordinater mellan 1 och 50. T ex om antalet är 2 (5,34),(23,19). Producera med Maple en sekvens av 200 sådana punkter och rita dessutom upp dem i ett punktdiagram (se GB, sid 206). Vad händer om man glömmer style=POINT i plot-kommandot?

Uppgift 23. Rotritning

Att rita upp nollställena till ett polynom är lätt i MATLAB, som du kommer att märka senare. I Maple är det omständligare (jag utesluter dock inte att jag missat någon procedur som gör det enkelt). Skriv Maple-kommandon som ritar upp rötterna till x^34=1. **Ledning**: Vi vet från Gula Boken (sid 205) att *fsolve* ger en sekvens z1,...,z34 av rötterna och att `plot([[x1,y1],...,[xn,yn]],style=POINT)` ritar punkter. Problemet är då att göra om sekvensen till en lista med rötterna på formen [x,y]. Vi kan bilda en sekvens *R* som är just `[x1,y1],...,[xn,yn]` med `R:=seq([Re(s[i]), Im(s[i])],i=1..`*`gradtalet`*`)`. Sedan plottar vi bara listan `[R]`.

4 Maple på webben

Följande webbadresser nämns i Gula Boken:

- http://www.indiana.edu/~statmath/math/maple/ — diverse Maple-info från Indiana University.
- http://www.maplesoft.com/ — information om Maple och annat från företaget som säljer Maple.